58 算幾大戰…時間與智慧的積累

在時間長河的緩慢流動與人類智慧的加速積累下，很多重要的數學定理一再地被挖掘與找到各種不同型式的證明方法。幾何學的「勾股定理」與代數學的「質數有無窮多個」就是精典的兩個代表。在十九世紀初，高斯曾對數論裡的一個定理，現稱為高斯互反定理，一連給了五種不同的證明。

中學的「算幾不等式」,「柯西不等式」與「正、餘弦定理」也是數學愛好者尋找各種不同證明方法的好材料，甚至有些證明方法大同小異或者重覆地被提出來。

吳建生老師與張海潮教授對算幾不等式討論出一種簡單的證明方法，介紹如下：

給定任意n個正數$a_1,a_2,\cdots,a_n$，它們的算術平均數

$$\mu=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

大於或等於它們的幾何平均數

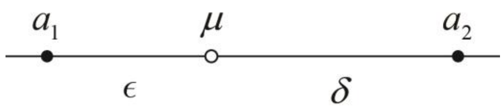
$$g=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

而且等號成立的條件為$a_1=a_2=\cdots=a_n$。

在$a_1,a_2,\cdots,a_n$這n個數中，當每一個數都跟算術平均數μ相等時，容易得到

$$\mu = g.$$

另外，在$a_1, a_2, \cdots, a_n$這n個數中，當有一個比算術平均數μ小時，代表至少有一數比μ大，設比μ小的數為a_1，比μ大的數為a_2，並令它們與μ的差分別為ϵ與δ，如下圖所示：



不妨假設$\epsilon \le \delta$，此時造n個新的正數如下

$$A_1 = a_1 + \epsilon, A_2 = a_2 - \epsilon, A_3 = a_3, A_4 = a_4, \cdots, A_n = a_n.$$

這新造的n個數有以下的性質：

① 它們的算術平均數也是μ：

因為從第三項起都一樣，又

$$A_1 + A_2 = (a_1 + \epsilon) + (a_2 - \epsilon) = a_1 + a_2,$$

所以算術平均數也是μ。

② 它們的幾何平均數g_1比原來的幾何平均數g大：

因為從第三項起都一樣，所以只需比較前兩項的乘積即可。

由

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= (a_1 + \epsilon)(a_2 - \epsilon) \\ &= a_1 a_2 + \epsilon(a_2 - a_1 - \epsilon) \\ &= a_1 a_2 + \epsilon\delta \\ &> a_1 a_2 \end{aligned}$$

知$g_1 > g$。

如果把上述過程稱為一次操作，那麼繼續操作下去，我們每回得到的算術平均數都是μ，而幾何平均數$g_1, g_2, g_3, \cdots$會滿足

$$\cdots > g_3 > g_2 > g_1 > g.$$

但是，至多操作n次，就會讓每個數都調整成μ，即此時的幾何平均數為μ，又

$$\mu > \cdots > g_3 > g_2 > g_1 > g.$$

因此，在$a_1,a_2,\cdots,a_n$這n個數中，當有一個比算術平均數μ小時，我們有

$$\mu > g.$$